Brown representability theorem

秋桜

Outline

Outline

Homotopy theory

ホモトピーとは, 位相空間や連続写像を連続的に変形するということを定式化した概念であり, 位相空間や連続写像から代数的な対象と準同型写像を与える.

ホモトピー論とは, 1930 年代に Poincare や Hopf などの手により発展しはじめたホモトピーを用いて, 位相空間や連続写像を研究する理論である.

CW complex

CW 複体は胞体を貼り合わせて得られる空間であり, 議論しやすく, 圏論的に優れた性質をもつ.

CW 複体は 1940 年代にホモトピー論の研究の中で Whitehead により定義され, 現代数学でも重要な空間である.

Category theory

圏と関手は, 数学的対象とその間の関係を抽象的に扱える概念であり, 圏と関手は様々な応用先があるため, 現代数学では欠かせないものになっている.

圏論とは, 1940 年代に Eilenberg や MacLane がホモロジーやコホモロジーを定式化するために発展しはじめた圏と関手の理論である.

Triangulated category

三角圏はシフト関手とよばれる自己関手と特三角とよばれる列のクラスをもった加法圏であり, 完全列や Puppe sequence の理論を一般化して扱える圏である.

三角圏論は 1960 年代に Puppe や Verdier により導入された理論である.

Puppe は安定ホモトピー圏を基本的な例と考えていて, Verdier はアーベル圏の導来圏を基本的な例と考えていた.

Notation

単位閉区間 [0,1] を I と表す.

基点付き位相空間 $(X, x), (Y, y)$ 間の基点を保つ連続写像のホモトピー類の集合を $\langle X, Y \rangle$ と表す.

群 G と自然数 n に対し, (G, n) 型 Eilenberg-MacLane 空間を $K(G, n)$ と表す.

$O = \varinjlim O(n)$ と表し, $U = \varinjlim U(n)$ と表す.

Notation

集合と写像のなす圏を **Set** と表す.

基点付き位相空間と基点を保つ連続写像のなす圏を $\mathbf{Top}_*$ と表す.

基点付き CW 複体のなす $\mathbf{Top}_*$ の充満部分圏を $\mathbf{CW}_*$ と表す.

基点付き連結 CW 複体のなす $\mathbf{CW}_*$ の充満部分圏を $\mathbf{ConCW}_*$ と表す.

アーベル群と群準同型写像のなす圏を **Ab** と表す.

Top の間の錐をとる関手を $C\colon \mathbf{Top}\to\mathbf{Top}$ と表す.

Top の間の懸垂をとる関手を $S\colon \mathbf{Top}\to\mathbf{Top}$ と表す.

Outline

Reduced cohomology theory

Definition 2.1 (簡約コホモロジー論)

$\mathbf{CW}_*$ 上の簡約コホモロジー論とは, 整数 n に対し, 関手 $\tilde{h^n}\colon \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ と CW 対 (X, A) に対し, 自然な双対境界準同型写像 $\delta^n\colon \tilde{h^n}(A) \to \tilde{h^{n+1}}(X/A)$ が与えられ, 以下をみたすものである.

(ホモトピー公理) $f \simeq g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}}}((X,x),(Y,y))$ と整数 n に対し, $\tilde{h^n}(f) = \tilde{h^n}(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(\tilde{h^n}(Y), \tilde{h^n}(X))$

(完全列公理) CW 対 (X, A) に対し, 長完全列

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \tilde{h^n}(X/A) \xrightarrow{\tilde{h^n}(q)} \tilde{h^n}(X) \xrightarrow{\tilde{h^n}(i)} \tilde{h^n}(A) \xrightarrow{\delta^n} \tilde{h^{n+1}}(X/A) \xrightarrow{\tilde{h^{n+1}}(i)} \cdots$$

が存在する.

(ウェッジ和公理) 包含写像 $i_\alpha\colon X_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha X_\alpha$ は整数 n に対し, 同型

$$\prod_\alpha \tilde{h^n}(i_\alpha)\colon \tilde{h^n}\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \xrightarrow{\cong} \prod_\alpha \tilde{h^n}(X_\alpha)$$

を誘導する.

Cohomology theory

今回は簡約コホモロジー論を扱うが, 簡約コホモロジー論と一般コホモロジー論は 1 対 1 対応する.

実際, 簡約コホモロジー論 $\tilde{h}^n$ に対し, $h^n(X, A) := \tilde{h}^n(X/A)$ とすることで一般コホモロジー論 h^n が定まり, 逆に一般コホモロジー論 h^n に対し, $X \to \{*\}$ を用いて, $\tilde{h}^n(X) := \mathrm{Coker}\ (h^n(\{*\}) \to h^n(X))$ とすることで簡約コホモロジー論 $\tilde{h}^n$ が定まる.

Reduced suspension and loop space

Top$_*$ の間に重要な随伴関手が存在する.

基点付き位相空間 (X, x) に対し, 基点付き位相空間 $(SX/(\{x\} \times I), [x])$ を対応させ, 基点を保つ連続写像 f に対し, $S(f)$ の商写像を対応させることにより, 関手 $\Sigma\colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Top}_*$ を得る.

基点付き位相空間 (X, x) に対し, ループ空間を対応させ, 基点を保つ連続写像 f に対し,

$$\begin{array}{ccccc} \Omega(f) & : & (\Omega X, c_x) & \longrightarrow & (\Omega Y, c_y) \\ & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & & [m] & \longmapsto & [f \circ m] \end{array}$$

対応させることにより, 関手 $\Omega\colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Top}_*$ を得る.

Adjoint functor

これらの関手は以下のように随伴関手となる.

Theorem 2.2

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Top}_* \arrow[r, shift left=2, "\Sigma"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Top}_* \arrow[l, shift left=2, "\Omega"] \end{tikzcd}$$

Loop space and homotopy group

位相空間 K と自然数 n に対し,

$$\pi_{n+1}(K) = \langle S^{n+1}, K \rangle = \langle SS^n, K \rangle \cong \langle \Sigma S^n, K \rangle \cong \langle S^n, \Omega K \rangle = \pi_n(\Omega K)$$

となる. つまり, ループ空間を考えることでホモトピー群の次元を下げることができる. 特に, $\Omega K(G, n+1)$ は $K(G, n)$ である.

Observation of reduced cohomology theory

$\mathbf{CW}_*$ 上の簡約コホモロジー論はまず, 基点付き CW 複体に対し, アーベル群を定めたいのであった.

基点付き CW 複体 $(X, x), (K, k)$ に対し, $\langle X, \Omega K \rangle$ はループ積が誘導する演算により, 群となる.

同様に, n-重ループ空間 $\Omega^n X$ を考えることで, アーベル群 $\langle X, \Omega^n K \rangle$ を得る.

I は局所コンパクトハウスドルフ空間なので, $K^{I \times I} \cong (K^I)^I$ が成立する. よって, $\Omega^n K$ は連続写像 $I^n \to K$ で ∂I^n を基点に移すものの空間とみなせる.

Observation of reduced cohomology theory

Proposition 2.3

基点付き位相空間 $(X, x), (K, k), (M, m)$ に対し, 弱ホモトピー同値 $K \to \Omega M$ が存在すれば, $\langle X, K \rangle \cong \langle X, \Omega M \rangle$ となる.

上の命題により, K はループ空間でなくてもループ空間と弱ホモトピー同値で十分であることがわかる.

Observation of reduced cohomology theory

簡約コホモロジー論の完全列公理より, CW 対 (CX, X) に対し, 長完全列

$$\dots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \tilde{h}^n(CX/X) \xrightarrow{\tilde{h}^n(q)} \tilde{h}^n(CX) \xrightarrow{\tilde{h}^n(i)} \tilde{h}^n(X) \xrightarrow{\delta^n} \tilde{h}^{n+1}(CX/X) \xrightarrow{\tilde{h}^{n+1}(q)} \dots$$

つまり,

$$\dots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \tilde{h}^n(\Sigma X) \xrightarrow{\tilde{h}^n(q)} 0 \xrightarrow{\tilde{h}^n(i)} \tilde{h}^n(X) \xrightarrow{\delta^n} \tilde{h}^{n+1}(\Sigma X) \xrightarrow{\tilde{h}^{n+1}(q)} \dots$$

を得る.
したがって, 自然同型 $\tilde{h}^n(X) \cong \tilde{h}^{n+1}(\Sigma X)$ が成立するが, $\tilde{h}^n(X) = \langle X, K_n \rangle$ とすると, この同型はループ空間への弱ホモトピー同値から誘導される.

Definition of Ω-spectrum

これらの観察により, Ω-spectrum を以下のように定義するのが妥当である.

Definition 2.4 (Ω-spectrum)

各整数 n に対し, 弱ホモトピー同値 $K_n \to \Omega K_{n+1}$ が存在する基点付き CW 複体の列 $(K_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ を Ω-spectrum という.

Example of Ω-spectrum

Example 2.5 (Eilenberg-MacLane spectrum)

基点付き CW 複体である Eilenberg-MacLane 空間の列 $(K(G,n))_{n\in\mathbb{Z}}$ は Ω-spectrum である.

Bott 周期性定理より, 弱ホモトピー同値 $O \to \Omega^8 O$ や $U \to \Omega^2 U$ が存在するため, O や U は周期的な Ω-spectrum を与える. これは K 理論で重要である.

Ω-spectrum defines reduced cohomology theory

任意の Ω-spectrum は簡約コホモロジー論を定める.

Theorem 2.6

任意の Ω-spectrum $(K_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ は各 n に対し, 関手 $\tilde{h}^n(X) = \langle X, K_n \rangle$ とすることで $\mathbf{CW}_*$ 上の簡約コホモロジー論を定める.

Sketch of proof

ホモトピー公理と完全列公理とウェッジ和公理をみたすことを確かめる.

基点を保つ連続写像 $f\colon (X,x) \to (Y,y)$ は各 n に対し, 準同型写像

$$
\begin{array}{ccccc}
\tilde{h}^n(f) \ : & \langle Y, K_n\rangle \cong \langle Y, \Omega K_{n+1}\rangle & \longrightarrow & \langle X, K_n\rangle \cong \langle X, \Omega K_{n+1}\rangle \\
 & \Cup & & \Cup \\
 & [m] & \longmapsto & [m \circ f]
\end{array}
$$

を誘導し, $f \simeq g$ ならば $\tilde{h}^n(f) = \tilde{h}^n(g)$ となるため, ホモトピー公理をみたす.

Sketch of proof

CW 対 (X, A) に対し, Puppe sequence

$$A \longrightarrow X \longrightarrow X/A \longrightarrow \Sigma A \longrightarrow \Sigma X \longrightarrow \Sigma(X/A) \longrightarrow \cdots$$

と Proposition 2.3 より, 完全列

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \langle X/A, K_n \rangle \arrow[r] \arrow[d, equal] & \langle X, K_n \rangle \arrow[r] \arrow[d, equal] & \langle A, K_n \rangle \arrow[r] \arrow[d, equal] & \langle X/A, K_{n+1} \rangle \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \tilde{h}^n(X/A) \arrow[r] & \tilde{h}^n(X) \arrow[r] & \tilde{h}^n(A) \arrow[r] & h^{\tilde{n}+1}(X/A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

を得るため, 完全列公理をみたす.

Sketch of proof

包含写像 $i_\alpha\colon X_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha X_\alpha$ は整数 n に対し, 同型写像

$$\begin{array}{ccccc} \prod_\alpha \tilde{h}^n(i_\alpha) & : & \left\langle \bigvee_\alpha X_\alpha, K_n \right\rangle \cong \left\langle \bigvee_\alpha X_\alpha, \Omega K_{n+1} \right\rangle & \longrightarrow & \prod_\alpha \langle X_\alpha, K_n \rangle \cong \prod_\alpha \langle X_\alpha, \Omega K_{n+1} \rangle \\ & & \Uparrow & & \Uparrow \\ & & [m] & \longmapsto & \prod_\alpha [m|_{X_\alpha} \circ i_\alpha] \end{array}$$

を誘導するため, $\prod_\alpha \tilde{h}^n(i_\alpha)\colon \tilde{h}^n\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \xrightarrow{\cong} \prod_\alpha \tilde{h}^n(X_\alpha)$ を得る.

よってウェッジ和公理をみたす.

Homotopy construction of cohomology

Theorem 2.7

$\mathbf{CW}_*$ 上の簡約コホモロジー論 $\tilde{h}$ が $n \neq 0$ に対し, $\tilde{h}^n(S^0) = 0$ をみたすとき, 任意の CW 複体 X と任意の $n > 0$ に対し, 自然同型
$\tilde{h}^n(X) \cong \tilde{H}^n(X; \tilde{h}^0(S^0))$ が成立する.

Eilenberg-MacLane spectrum を考えると以下が得られる.

Corollary 2.8

任意の CW 複体 X と任意の $n > 0$ と任意のアーベル群 G に対し, 自然同型 $\langle X, K(G,n) \rangle \cong \tilde{H}^n(X; G)$ が成立する.

Outline

Mayer-Vietoris axiom

A, B を $X \in \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}}$ の部分複体で $A \cup B = X$ となるもの, $h\colon \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を関手とし, 次の図式を考える.

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, hook, "j_A"] \arrow[d, hook, "j_B"'] & A \arrow[d, hook, "k_A"] \\ B \arrow[r, hook, "k_B"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} h(A \cap B) & h(A) \arrow[l, "j_A^*"'] \\ h(B) \arrow[u, "j_B^*"] & h(X) \arrow[l, "k_B^*"] \arrow[u, "k_A^*"'] \end{tikzcd}$$

このとき, $a \in h(A)$, $b \in h(B)$ で $j_A^*(a) = j_B^*(b)$ となるならば, $x \in h(X)$ で $k_A^*(x) = a$ かつ $k_B^*(x) = b$ となるものが存在する.
上の条件を Mayer-Vietoris 公理という.

Brown functor

Definition 3.1 (Brown 関手)

関手 $h\colon \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ がホモトピー公理とウェッジ和公理と Mayer-Vietoris 公理をみたすとき, Brown 関手という.

Example 3.2 (Hom 関手)

基点付き連結 CW 複体 K に対し, Hom 関手 $\langle -, K\rangle : \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ は Brown 関手である.

Example 3.3

基点付き連結 CW 複体 X に対し, X 上の主 G 束の同型類をとる関手 $H_G : \mathbf{ConCW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ は Brown 関手である.

Example of brown functor

Example 3.4 (簡約コホモロジー論)

簡約コホモロジー論 $\tilde{h}^n\colon \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ は Brown 関手である.

定義より簡約コホモロジー論はホモトピー公理とウェッジ和公理をみたし, 簡約コホモロジー論は Mayer-Vietoris 完全列

$$\cdots \longrightarrow \tilde{h}^n(X) \xrightarrow{(k_A^*, k_B^*)} \tilde{h}^n(A) \oplus \tilde{h}^n(B) \xrightarrow{j_A^* - j_B^*} \tilde{h}^n(A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

を導くため, その完全性より, Mayer-Vietoris 公理をみたすことがわかる.

Brown representability theorem

Theorem 3.5

$h\colon \mathbf{ConCW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を Brown 関手とする．このとき, $K \in \mathbf{ConCW}_*^{\mathrm{op}}$ と $u \in h(K)$ が存在し, 任意の $X \in \mathbf{ConCW}_*^{\mathrm{op}}$ に対し, 写像

$$\begin{array}{cccccc} T_u & : & \langle X, K \rangle & \longrightarrow & h(X) \\ & & \cup\!\!\!\!\!\!\!\;\;\, \mathrm{|} & & \cup\!\!\!\!\!\!\!\;\;\, \mathrm{|} \\ & & [f] & \longmapsto & f^*(u) \end{array}$$

は全単射である．つまり, Brown 関手 h は表現可能関手である．

上の様な (K, u) を普遍対といい, 普遍対はホモトピー同値を除いて一意である．

n-universal pair and π_*-universal pair

Definition 3.6 (n-普遍対, π_*-普遍対)

h: $\mathbf{ConCW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を Brown 関手とする．このとき, 以下をみたす $K \in \mathbf{ConCW}_*$ と $u \in h(K)$ の対 (K, u) を n-普遍対という．

$$\begin{array}{ccccc} T_u & : & \langle S^i, K\rangle = \pi_i(K) & \longrightarrow & h(S^i) \\ & & \Cup & & \Cup \\ & & [f] & \longmapsto & f^*(u) \end{array}$$

は $i < n$ に対し, 全単射であり, $i = n$ に対し, 全射である．

また, (K, u) が任意の n について n-普遍対であるとき, π_*-普遍対という．

π_*-普遍対はホモトピー同値を除いて一意である．

Key lemma

Lemma 3.7

$h\colon \mathbf{ConCW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を Brown 関手, $X \in \mathbf{ConCW}_*^{\mathrm{op}}$, $x \in h(X)$ とする．このとき, π_*-普遍対 (K, u) で K は X を部分複体として含み, $j\colon X \hookrightarrow K$ に対し, $j^*(u) = x$ となるものが存在する.

Lemma 3.8

$h\colon \mathbf{ConCW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を Brown 関手, (K, u) を π_*-普遍対, (X, A) を基点付き CW 対, $x \in h(X)$ とする．このとき, 任意の $f\colon A \to K$ で $k\colon A \hookrightarrow X$ に対し, $f^*(u) = k^*(x)$ となるものに対し, f を拡張して, $g\colon X \to K$ で $g^*(u) = x$ となるものが存在する.

$$\begin{tikzcd}
(A, f^*(u) = k^*(x)) \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "k"'] & (K, u) \\
(X, x) \arrow[ur, "\exists g"'] &
\end{tikzcd}$$

Proof of brown representability theorem

Lemma 3.7 より, π_*-普遍対 (K, u) が普遍対になることを示せばよい.
ウェッジ和公理と Lemma 3.8 より, 図式

$$\begin{tikzcd} (\{*\}, 0) \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "k"'] & (K, u) \\ (X, x) \arrow[ur, "\exists g"'] & \end{tikzcd}$$

を得るため,

$$\begin{array}{cccccc} T_u & : & \langle X, K \rangle & \longrightarrow & h(X) \\ & & \Psi & & \Psi \\ & & [g] & \longmapsto & g^*(u) \end{array}$$

は全射である.

Proof of brown representability theorem

任意の $[f_0], [f_1] \in \langle X, K \rangle$ に対し, $T_u([f_0]) = T_u([f_1])$ とする. つまり, $f_0^*(u) = f_1^*(u)$ となる. ここで, Lemma 3.8 より, 図式

$$\begin{tikzcd}
(X \times \partial I)/(\{*\} \times \partial I) = X \vee X \arrow[r, "f_0 \vee f_1"] \arrow[d, hook, "k"'] & (K, u) \\
(X \times I)/(\{*\} \times I) \arrow[ur, "\exists H"'] &
\end{tikzcd}$$

を得る. よって, H は f_0 から f_1 へのホモトピーである. したがって, $[f_0] = [f_1]$ となるため,

$$\begin{array}{cccc}
T_u : & \langle X, K \rangle & \longrightarrow & h(X) \\
& \Uplus & & \Uplus \\
& [g] & \longmapsto & g^*(u)
\end{array}$$

は単射である.

Brown representability theorem

任意の Ω-spectrum は簡約コホモロジー論を定めたが, 驚くべきことに逆も成立する.

Theorem 3.9

任意の $\mathbf{CW}_*$ 上の簡約コホモロジー論はある Ω-spectrum $(K_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ を用いて, $\tilde{h}^n(X) \cong \langle X, K_n \rangle$ と表現できる.

Proof of theorem 3.9

簡約コホモロジー論で簡約懸垂をとる写像をうつすと同型射になり, 基点付き CW 複体の簡約懸垂は連結なので, 基点付き連結 CW 複体を考えれば十分である.

簡約コホモロジー論は Brown 関手だったので, Theorem 3.5 より, 任意の n に対し, $\tilde{h}^n(X) \cong \langle X, K_n \rangle$ となる基点付き連結 CW 複体の列 $(K_n)_{n \in Z}$ が得られる.

自然同型 $\tilde{h}^n(X) \cong \tilde{h}^{n+1}(\Sigma X)$ と $\Sigma \dashv \Omega$ は自然同型

$$\Phi_X \colon \langle X, K_n \rangle \xrightarrow{\cong} \langle \Sigma X, K_{n+1} \rangle \xrightarrow{\cong} \langle X, \Omega K_{n+1} \rangle$$

を導く.

Proof of theorem 3.9

Φ_X の自然性より, 任意の $f\colon X \to K_n$ に対し, 図式

$$\begin{array}{ccc} \langle K_n, K_n\rangle & \xrightarrow{-\circ f} & \langle X, K_n\rangle \\ \Phi_{K_n}\big\downarrow & & \big\downarrow\Phi_X \\ \langle K_n, \Omega K_{n+1}\rangle & \xrightarrow[-\circ f]{} & \langle X, \Omega K_{n+1}\rangle \end{array}$$

を得る. よって, $\Phi_X = \Phi_{K_n}(\mathrm{id}_{K_n}) \circ -$ となり,

$$\Phi_{S^i} = \Phi_{K_n}(\mathrm{id}_{K_n}) \circ -\colon \pi_i(K_n) = \langle S^i, K_n\rangle \xrightarrow{\cong} \langle S^i, \Omega K_{n+1}\rangle = \pi_i(\Omega K_{n+1})$$

を導くため, $\Phi_{K_n}(\mathrm{id}_{K_n})\colon K_n \to \Omega K_{n+1}$ は弱ホモトピー同値である.

Outline

Triangulated category

基点付き CW 複体を対象とし, 射を $\varinjlim \langle \Sigma^n X, \Sigma^n Y \rangle$ とする圏を安定ホモトピー圏というが, これは三角圏となる.

Brown representability theorem の三角圏への一般化が存在する.

三角圏の Brown representability theorem は実は良い三角圏でしか成立しないが応用先が広い. そこでどのような三角圏で Brown representability theorem が成立するのかという問題も考えられている.

Brown representability theorem

Theorem 4.1

$\mathscr{T}$ をコンパクト生成な三角圏とする．このとき, 余積を積にうつすコホモロジー的関手 $h\colon \mathscr{T} \to \mathrm{Ab}$ は表現可能関手である．

これは Theorem 3.5 の三角圏への一般化である．
Theorem 4.1 により, 積の存在が示されたり, Grothendieck duality の別証明が得られたりと様々な応用があるが今回は以下を紹介する．

Corollary 4.2

$\mathscr{S}$ をコンパクト生成な三角圏, $\mathscr{T}$ を三角圏とし, $F\colon \mathscr{S} \to \mathscr{T}$ を余積を保つ三角関手とする．このとき, F は右随伴関手 $G\colon \mathscr{T} \to \mathscr{S}$ をもつ．

Proof of corollary 4.2

任意の $T \in \mathscr{T}$ に対し,

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(F(-),T) & : & \mathscr{S}^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathsf{Ab} \\ & & \Cup & & \Cup \\ & & S & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(F(S),T) \end{array}$$

は余積を積にうつすコホモロジー的関手である. よって, Theorem 4.1 より, $G(T) \in \mathscr{S}$ が存在して, 自然同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(F(S),T) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(S,G(T))$$

を得る.

Proof of corollary 4.2

$\mathscr{T}$ の射 $T \to T'$ に対し, 自然変換

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(F(-), T) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(F(-), T')$$

が定まるが, 自然同型より, 自然変換

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(-, G(T)) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(-, G(T'))$$

が定まる. ここで米田の補題より, $\mathscr{S}$ の射 $G(T) \to G(T')$ が定まる. この G が右随伴関手となる.

Outline

Reference

[Hatcher] Allen Hatcher(著)・「Algebraic Topology」・Cambridge University Press・2001

[荒木] 荒木 捷朗 (著)・「一般コホモロジー」・紀伊國屋書店・1975

[河野, 玉木] 河野 明 (著), 玉木 大 (著)・「一般コホモロジー」・岩波書店・2008

[西田] 西田 吾郎 (著)・「ホモトピー論」・共立出版・1985

[Neeman] Amnon Neeman (著)・「Triangulated Categories」・Princeton University Press・2014